

Untersuche auf Stetigkeit

Die abzählbare Menge der rationalen Zahlen im Intervall $I = [0, 1]$ werde als eine unendliche Folge $\{r_n\}_{n \geq 1}$ geschrieben. Mit der Bezeichnung

$$A(x) = \{n \mid n \in \mathbb{N}, r_n \leq x\} \quad \text{für } x \in I$$

definieren wir die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n \in A(x)} \frac{1}{2^n}.$$

Beweisen Sie:

- Die Funktion f ist auf I monoton wachsend.
- Die Funktion f ist an den irrationalen Stellen in I stetig und an den rationalen Stellen in I unstetig.